1. **Поиск экстремума функции одной переменной методом золотого сечения**

В основе метода лежит принцип деления отрезка в пропорциях золотого сечения. Является одним из простейших вычислительных методов решения задач оптимизации. Отличается от метода дихотомии тем что отрезок делится не на пополам, а на большую и меньшую часть. Таким образом поиск происходит быстрей.

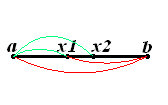
Пусть задана функция f(x) и отрезок [a; b], на котором требуется найти экстремум. Рассматриваемый отрезок делится в оба направления точками x1 и x2 в отношении золотого сечения. То есть:

[Деление отрезка в пропорции золотого сечения - vscode.ru](https://vscode.ru/wp-content/uploads/2015/04/proportiongoldensectionx1x2.png)

φ — это пропорция золотого сечения.

Следовательно координаты x1 и x2 находятся по формулам:

[Нахождение координат x1 и x2 при делении отрезка в пропорции золотого сечения - vscode.ru](https://vscode.ru/wp-content/uploads/2015/04/goldensectionx1x2.png)

[](https://vscode.ru/wp-content/uploads/2015/04/goldensectionX.png)

Таким образом точки x1 и x2 делят отрезки [a; x2] и [x1; b] соответственно в пропорции золотого сечения. Это свойство далее будет использоваться для построения итеративного процесса вычисления экстремума функции.

**Описание алгоритма**

1. Задаются начальные параметры: границы отрезка [a; b] и точность вычислений ε.
2. Рассчитываются координаты точек деления: [Метод золотого сечения - vscode.ru](https://vscode.ru/wp-content/uploads/2015/04/x1x2calcGS.png). Затем вычисляется значение функции f(x) в этих точках: [Значение функции в точках x1, x2](https://vscode.ru/wp-content/uploads/2015/04/fxGS.png)ЕСЛИ [y1y2GS1](https://vscode.ru/wp-content/uploads/2015/04/y1y2GS1.png) (случай поиска минимума функции. Для поиска точки максимума изменить неравенство на [y1y2GS2](https://vscode.ru/wp-content/uploads/2015/04/y1y2GS2.png)), ТО [ax1GS](https://vscode.ru/wp-content/uploads/2015/04/ax1GS.png). ИНАЧЕ [bx2GS](https://vscode.ru/wp-content/uploads/2015/04/bx2GS.png).
3. ЕСЛИ требуемая точность достигнута: [accuracyGS](https://vscode.ru/wp-content/uploads/2015/04/accuracyGS.png), ТО [xGS](https://vscode.ru/wp-content/uploads/2015/04/xGS.png) и конец алгоритма. ИНАЧЕ возврат к шагу 2.
4. **Поиск экстремума функции одной переменной методом парабол**

Text, letter

Description automatically generated

Text

Description automatically generated with low confidence

1. **Поиск экстремума функции одной переменной комбинированным методом Брента**

В малой окрестности точки минимума функции метод парабол показывает высокую скорость сходимости, превосходящую скорости сходимости методов деления отрезка пополам и золотого сечения. Однако на больших интервалах поиска этот метод может вести себя нестабильно.

Метод Брента комбинирует в себе метод парабол и метод золотого сечения, совмещая в себе высокую скорость сходимость одного и стабильность другого метода.

𝑥 – точка, в которой функция принимает наименьшее из всех вычисленных на текущий момент значений

𝑤 – точка, в которой функция либо принимает второе снизу из всех вычисленных на текущий момент значений, либо принимает значение 𝑓(𝑥)

𝑣 – предыдущее значение w

В методе Брента парабола строится по трем точкам 𝑥, 𝑤, 𝑣, которые представляют собой три наилучших приближения к точке минимума функции. Если парабола не может быть построена или вершина параболы отвергается в качестве очередного приближения к точке минимума функции, то выполняется шаг, соответствующий методу золотого сечения.

Вершина параболы может быть отвергнута в двух случаях.

Первый случай, когда 𝑢 /∈ [𝑎, 𝑏]. Вершина вышла за границы отрезка поиска.

Второй случай, когда |𝑢 − 𝑥| > 𝑑prv 2 .

Вершина параболы «сильно» отдалилась от точки текущего наименьшего значения функции. Этот критерий представляет собой так называемую эвристику, которую формально обосновать нельзя. Целесообразность эвристики подтверждается положительным опытом ее практического использования.

1. **Алгоритм неточной одномерной минимизации (Алгоритм Бройдена — Флетчера — Гольдфарба — Шанно)**

Метод **BFGS**, итерационный метод численной оптимизации, назван в честь его исследователей: **B**royden, **F**letcher, **G**oldfarb, **S**hanno. Относится к классу так называемых квазиньютоновских методов. В отличие от ньютоновских методов в квазиньютоновских не вычисляется напрямую гессиан функции, т.е. нет необходимости находить частные производные второго порядка.

Вместо этого гессиан вычисляется приближенно, исходя из сделанных до этого шагов.  
Существует несколько модификаций метода:

* **L-BFGS** (ограниченное использование памяти) — используется в случае большого количества неизвестных.
* **L-BFGS-B** — модификация с ограниченным использованием памяти в многомерном кубе.

Метод эффективен и устойчив, поэтому зачастую применяется в функциях оптимизации. Например в SciPy, популярной библиотеки для языка python, в функции optimize по умолчанию применяется BFGS, L-BFGS-B.

Алгоритм

**Text

Description automatically generated**

**Graphical user interface, text, application, email

Description automatically generated**